数理解析研究所講究録
1069巻 1998年 53-62

カルタン埋めこみの安定性について

間下克哉 (Katsuya Mashimo)
東京農工大学 工学部

コンパクト対称空間の全測地的部分多様体の体積の第2変分に関する安定性についての研究は Chen-Leung-Nagano [2] により始められた．その後 Ohnita [14] は彼らの方法の方法を定式化し、ヘルガソン球と呼ばれる全測地的部分多様体の安定性を調べた．

コンパクト・リー群 G は両側普変計量に関してリーマン対称空間になるが、G の全測地的部分多様体の例として良く知られているものに

- 閉部分群
- カルタン埋め込みの像

がある．

σ を G 上の対合的自己同型，K を σ により固定される G の元全体のなす閉部分群とする．このとき写像

$$G \to G\ ;\ g \mapsto g\sigma(g^{-1})$$

は，等質空間 G/K の G への埋込み Ψ_σ 引起こす．Ψ_σ を σ が引起こす**カルタン埋込み**という．

カルタン埋め込みを定義するために、σ が対合的である必要はないが、対合的でない自己同型 σ に対応するカルタン埋め込みの像 $\Psi_\sigma(G/K)$ は極小部分多様体とは限らない．我々は、単純リー群 G 上の自己同型に対して次の問題に興味を持つ；

- カルタン埋め込みは極小埋め込みか？
- もしそうならそれは安定な極小埋め込みか？

ここでは、とくに σ が位数 4 の内部自己同型である場合について、上の問題を考える．

1 リー部分群の安定性について

カルタン埋め込みの像の（極小性と）安定性について述べる前にリー部分群の安定性について見ておこう.

1.1 Dynkin の index. $\mathfrak{g}$ を G のリー環とし $\mathfrak{t}$ を極大トーラスとする. Δ で $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ のカルタン部分環 $\mathfrak{t}^{\mathbf{C}}$ に関する 0 でない根の全体を表す. $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ 上の $Ad(G)$-不変内積 $(,)_G$ を長い根の長さが $\sqrt{2}$ となる様に定める（この内積を G の**標準内積**という）. K を G のコンパクト単純リー部分群とするとき、Schur の補題により

$$(X,Y)_G = j\,(X,Y)_K \quad X,Y \in \mathfrak{k}$$

により実定数 j が定まる. j は正の整数であることが知られている ([4]). j を K の G における（Dynkin の意味の）**index** という.

1.2 Index が 1 の部分群の安定性. Dao [3], Tasaki [16] は、連結なコンパクト単純リー群 G のリー環の上の３次交代形式

$$\omega(X,Y,Z) = \frac{1}{\sqrt{2}}([X,Y],Z) \quad X,Y,Z \in \mathfrak{g}$$

を $\mathfrak{g}$ の有向３次元部分空間全体のなすグラスマン多様体上の関数と考えた時の最大値（comass) は 1 であり、最大値をとるのは $\{X,Y,Z\}$ が G の index が 1 の３次元リー部分環の正規直交基底のときに限ることを示した. ω は自然に G 上の閉微分形式に拡張される.

リーマン多様体 M 上の Comass が 1 の閉微分形式 ω を**キャリブレーション**という. M 内の向き付けられた部分多様体 N は、全ての点 x で接空間が $\omega(T_xN)=1$ を満たしているとき ω によりキャリブレートされた部分多様体であるという. Stokes の定理により、キャリブレートされた部分多様体 N は、同じホモロジー類に属する部分多様体の中で体積が最小であることが簡単にわかる（Harvey-Lawson [6]）.

定理 1 (Dao, Tasaki) 連結なコンパクト単純リー群 G の *index* が 1 の３次元単純リー部分群は同じホモロジー類に属する部分多様体の中で体積が最小である.

この一般化として我々は次の結果を得た.

定理 2 (Mashimo-Tasaki[10]) 連結なコンパクト単純リー群 G の *index* が 1 の単純リー部分群は安定な極小部分多様体である.

2 カルタン埋め込みの安定性

2.1. σ の位数が 2 のとき.

定理 3 (Chen-Leung-Nagano [2], Mashimo [12]) σ の位数が 2 で，カルタン埋込み Ψ_σ が極小部分多様体として不安定であるものは次のどれか；

- G/K はエルミット対称空間
- $(SU(n), SO(n)) \qquad (n \geq 3)$,
- $(SU(4m+2)/\{I,-I\}, SO(4m+2)/\{I,-I\}) \qquad (m \geq 1)$,
- $(Spin(n), (Spin(n-3) \times Spin(3))\mathbf{Z}_2) \qquad (n \geq 7)$,
- $(G_2, SO(4))$.

コンパクト対称空間 $M = G/K$ の全測地的部分多様体の中に、原点 $o = eK$ での点対称 s_o の固定点全体の集合の p を通る連結成分 $M^+(p)$ (**極地**)、$s_o \circ s_p$ の p を通る連結成分 $M^-(p)$ (**子午空間**) がある (Chen and Nagano [1]).

G を連結なコンパクト単純リー群とする．σ を G 上の対合的自己同型とし $K = \{k \in G : \sigma(k) = k\}$ とするとき G の極地はある G 上の対合的自己同型 σ の定めるカルタン埋め込みの像であり、子午空間は σ の固定する元のなす部分群 (の単位連結成分) である．

一般のコンパクト既約対称空間の全ての極地 M_+ 及び全ての子午空間 M_- の安定性については M.S.Tanaka [15] により決定されている．

2.2. σ の位数が 3 の場合. コンパクト単純リー群上の位数 3 の自己同型は Wolf-Gray [18] により分類されている．

T を G の極大可換部分群とし $\mathfrak{t}$ をそのリー環とする．$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ の $\mathfrak{t}^{\mathbf{C}}$ に関する 0 の全体 Δ の基本ルート系を $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ で表す．Δ の最高ルートを $\alpha_0 = \sum_{j=1}^r m_j \alpha_j$ とし

$$\mathcal{D}_0 = \{X \in \sqrt{-1}\mathfrak{t} \ : \ \alpha(\sqrt{-1}X) \geq 0, \alpha_0(\sqrt{-1}X) \leq 1\}$$

とおく．G の内部自己同型は $\mathcal{D}_0$ のある元 X に対する $\exp(ad\, 2\pi\sqrt{-1}\, X)$ と共役である．$\mathcal{D}_0$ の頂点 $\{v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_r\}$ を

$$v_0 = 0,\ m_j \alpha_j(v_i) = \delta_{ij}\ (1 \leq i, j \leq r)$$

で定める．ルートの番号付けはブルバキに従う．

$Spin(8)$ の上には、2 種類の位数 3 の外部自己同型が存在するが、これをτ, τ' で表す．

定理 4 (Mashimo [12]) σ を連結なコンパクト単純リー群上の位数 3 の自己同型とする．$\tilde{G}$ を G の普遍被覆群、$\tilde{\sigma}$ を σ の $\tilde{G}$ へのリフトとするとき、カルタン埋め込み Ψ_σ の像が安定な極小部分多様体になるのは次のどれか．

$\tilde{G}$	$\tilde{\sigma}$	$\tilde{K}$
E_6	$\exp(ad\,2\pi\sqrt{-1}\,v_3)$	$\{SU(3)\times SU(3)\times SU(3)\}/Z_3$
E_7	$\exp(ad\,2\pi\sqrt{-1}\,v_3)$	$\{SU(3)\times SU(6)\}/Z_3$
E_8	$\exp(ad\,2\pi\sqrt{-1}\,v_6)$	$\{SU(3)\times E_6\}/Z_3$
E_8	$\exp(ad\,2\pi\sqrt{-1}\,v_8)$	$SU(9)/Z_3$
G_2	$\exp(ad\,2\pi\sqrt{-1}\,v_1)$	$SU(3)$
$Spin(8)$	τ	G_2
$Spin(8)$	τ'	$SU(3)/Z_3$

2.3. σ が位数 4 の内部自己同型のとき. コンパクト単純リー群上の位数 4 の自己同型は Jimenez [8] により分類されている.

σ の位数を k とし、λ で 1 の原始 k-乗根を表す. $\mathfrak{m}_j^{\mathbf{C}}$ $(0\le j\le k-1)$ で $\sigma:\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}\to\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ の固有値 λ^j に対する固有空間を表すことにする. $\mathfrak{m}_j=\left(\mathfrak{m}_j^{\mathbf{C}}+\mathfrak{m}_{k-j}^{\mathbf{C}}\right)$ とおく $(0\le j\le k-j\le k)$. $\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(G)$-不変内積を $(,)$ をとり、これにより定まる G/K 上の (normal homogeneous) リーマン計量も同じ記号で表す. カルタン埋め込みにより誘導される計量を $\langle,\rangle$ で表すことにするとき $\mathfrak{m}_j$ 上では $\langle,\rangle=\sin^2(j\pi/k)\,(,)$ で、異なる i,j に対する $\mathfrak{m}_i$ と $\mathfrak{m}_j$ とは直交する.

命題 5 カルタン埋め込み Ψ_σ の第 2 基本形式を α とするとき

$$\alpha(X,Y)=[\sigma(X),Y]_{\mathfrak{k}},\quad X,Y\in\sum_j\mathfrak{m}_j.$$

とくに σ が内部自己同型 $\sigma=\exp(\sqrt{-1}ad2\pi X)$ のときには、平均曲率ベクトルは

$$\sum_{j=1}^{k-1}\cot(j\pi/k)\left(\sum_{\alpha(\sqrt{-1}X)=j/k}\alpha\right)$$

で与えられる.

Jimenez の分類表に出てくる、それぞれの場合について平均曲率ベクトルを計算して、カルタン埋め込みが極小埋め込みになるものはわかっているが、ここではその結果は省略する.

定理 6 σ を連結なコンパクト単純リー群 G 上の位数 4 の内部自己同型とする. $\tilde{G}$ を G の普遍被覆群、$\tilde{\sigma}$ を σ の G へのリフトとするとき、カルタン埋め込み Ψ_σ の像が安定な極小部分多様体になるのは次のどれか.

$\tilde{G}$	$\tilde{\sigma}$	$\mathfrak{k}$
E_7	$\exp(ad\,2\pi\sqrt{-1}\,v_4)$	$\mathfrak{su}(2)+\mathfrak{su}(4)+\mathfrak{su}(4)$
E_8	$\exp(ad\,2\pi\sqrt{-1}\,v_3)$	$\mathfrak{su}(2)+\mathfrak{su}(8)$
E_8	$\exp(ad\,2\pi\sqrt{-1}\,v_6)$	$\mathfrak{su}(4)+\mathfrak{so}(10)$

2.4. 証明の概略 まず体積の第2変分公式を思い出しておこう．M をコンパクト・リー群 G のコンパクト極小部分多様体とする．V を M の1径数変分 M_t の変分ベクトル場とするとき

$$d^2 Vol(M_t)/dt^2|_{t=0} = \int_M \left((-\Delta + S - A)(V^N), V^N\right) dvol_M.$$

が成り立つ．ただし Δ は法束 $\nu(M)$ の粗ラプラシアン、$(S(\xi),\eta) = \sum_i \left(R^G(e_i,\xi)e_i,\eta\right)$, $(A(\xi),\eta) = \sum_{i,j}(\alpha(e_i,e_j),\xi)(\alpha(e_i,e_j),\eta)$ で V^N は、V の法成分を表すものとする．

$\mathfrak{k}$ の中心が自明でないとき: $H \neq 0$ を $\mathfrak{k}$ の中心の元とするとき

$$\tilde{H}\Big|_{gK} = dL_g(dR_{\sigma(g^{-1})}(H))$$

は Ψ_σ の、平行な法ベクトル場になる．$\tilde{H}$ を変分ベクトルとして持つ変分について、第2変分公式から容易にカルタン埋め込みは（もしそれが極小はめ込みであっても）不安定になることがわかる．

$\mathfrak{k}$ が半単純のとき: 法束 $\nu(M)$ の切り口を

$$C^\infty(G;\mathfrak{k}) = \{f : G \to \mathfrak{k} : f(gk) = Ad(k^{-1})f(g),\ g \in G,\ k \in K\}$$

の元と自然に同一視する．$U(\mathfrak{g}) \otimes L(\mathfrak{k},\mathfrak{k})$ の元 $L \otimes X$ の $C^\infty(G;\mathfrak{k})$ への作用を

$$((L \otimes X)f)(g) = L(d/dt|_{t=0} f(g\exp(tX)))$$

により定める．$\nu(M)$ 上の不変微分作用素は $U(\mathfrak{g}) \otimes L(\mathfrak{k},\mathfrak{k})$ の元と同一視される．λ を G の支配的整ウェイトとするとき、$V(\lambda)$ で G の複素既約表現でその最高ウェイトが λ であるものを表すことにする．$V(\lambda) \otimes L(V(\lambda),\mathfrak{k})$ の $v \otimes L$ は

$$(v \otimes L)(g) = L(g^{-1}v)$$

により $C^\infty(G;\mathfrak{k})$ の元とみなせる．$U(\mathfrak{g})$ のカシミール元を $C_\mathfrak{g}$ とする．$\mathfrak{m}_j$ の（$(,)$ に関する）正規直交基底 $X_i^{(j)}$ をとり $C_j = \sum_i (X_i^{(j)})^2$ とおく．

命題 7 カルタン埋め込みのヤコビ微分作用素は

$$J = \sum_{j=1}^{[k/2]} \sin^2(j\pi/k)\left(-I \otimes C_j + ad_{C_j} \otimes I\right)$$

と同一視される．とくに σ の位数 k が3以下の場合は

$$J = \sin^2(\pi/k)\left(-I \otimes C + ad_\mathfrak{g}(C) \otimes I\right).$$

一般に $V(\lambda)\otimes L(V(\lambda),\mathfrak{k})$ 上 J は定数である. σ の位数が 3 以下で $L(V(\lambda),\mathfrak{k})\neq\{0\}$ の場合には、次を用いて容易にその定数を計算することが出来る.

補題 8 (Freudenthal) (V,ρ) を複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ の、最高ウェイトが λ の、複素既約表現とする. $C_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ のカシミール元とするとき $\rho(C)=a_\lambda I|_V$ であるが、固有値は

$$a_\lambda=-(\lambda+2\delta,\lambda)$$

で与えられる（ 2δ は $\mathfrak{g}$ の正ルートの総和.）

σ の位数が 3 以下の場合は、Peter-Weyl の定理、Frobenius の相互律および次の補題を組み合わせることにより、安定になるものの殆どの場合がわかる.

補題 9 (Mashimo [12]) G をコンパクト・リー群 K を *index* 1 の閉単純部分群とする. G の最高ウェイト λ の複素既約表現 $V^G(\lambda)$ が $(\mathfrak{k}^{\mathbf{C}},Ad_K)$ を K-既約成分として持つならば、カシミール作用素の固有値について

$$(\lambda,\lambda+2\delta)>(\alpha_0,\alpha_0+2\delta)$$

が成り立つ. ただし 、α_0 は G の最高ルート、2δ は G の正のルートの総和とする.

G をコンパクト単純リー群, σ を G 上の位数 4 の自己同型とする. σ の固定する元全体のなす G の部分群を K, σ^2 の固定する元全体のなす部分群を K_1 とする.

G の複素既約表現 V を K の複素表現として次のように分解する；

$$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_m\oplus V_1$$

ここで U_i $(1\leq i\leq m)$ は $\mathfrak{k}$ の既約因子と同型な K 既約表現であり, V_1 は $Hom_K(V_1,\mathfrak{k})=\{0\}$ を満たすものとする.

p_i を V から U_i への標準射影とする. $L\in Hom_K(V,\mathfrak{k})$ にたいして $L=L\circ p_i$ であることに注意すると

$$(I\otimes C_j)(v\times L)(g)=(L\circ p_i)(C_jg^{-1}v)=L(C_j\circ p_i(g^{-1}v))$$

となるので $I\otimes$ の固有値は C_j の V_i 上での固有値に一致する.

V_j を含む K_1 既約成分上で（K_1 のカシミール作用素）C_0+C_2 は一定で, その固有値はフロイデンタールの固有値公式により計算でき、$C_1=C_{\mathfrak{g}}-(C_0+C_2)$ より C_1 の V_j 上での固有値を求めることができる.

$ad_{\mathfrak{g}}(C_j)\otimes I$ については随伴表現に対して同様に考えればよい.

例 $G=F_4$, $\sigma=\exp(2\pi\sqrt{-1}v_3)$ のとき、対応するカルタン埋め込みが不安定な極小埋め込みであることを示そう. (極小埋め込みであることの証明は略す)

$\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{so}(9)$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{a}_3 \oplus \mathfrak{a}_1$ である．$\mathfrak{k} \supset \mathfrak{a}_1$ の Dykin の意味の index は 2 であることに注意しておく．

まず命題 8 から，ヤコビ微分作用素 J は

$$J = (1/2)\,(ad_{\mathfrak{g}}(C_{\mathfrak{g}}) \otimes I + ad_{\mathfrak{g}}(C_1) \otimes I - I \otimes C_{\mathfrak{g}} - I \otimes C_1)$$

である．

$\mathfrak{F}_4 \supset \mathfrak{so}(9)(\supset \mathfrak{k} = \mathfrak{a}_3 \oplus \mathfrak{a}_1)$ のそれぞれのリー環の随伴表現の固有値を Freudenthal の固有値公式により求めると

$$\begin{array}{lll} ad_{\mathfrak{g}}(C_0 + C_1 + C_2) = -18 & on & \mathfrak{f}_4 \\ ad_{\mathfrak{g}}(C_0 + C_2) = -14 & on & \mathfrak{so}(9) \end{array}$$

だから

$$J = -22I - I \otimes C_{\mathfrak{g}} - I \otimes C_1.$$

再びフロイデンタールの固有値公式を用いて $\rho_\lambda(C_{\mathfrak{g}}) > -22$ を満たす複素既約表現 λ を探すと $\lambda = \varpi_1, \varpi_4$ のみであることがわかる．$\lambda = \varpi_1$ のときには $J = 0$ だから問題となるのは ϖ_4 のみ．

$\mathfrak{f}_4$ の最高ウェイト ϖ_4 の複素既約表現を $\mathfrak{so}(9)$ の表現として分解すると

$$(0\,0\,0\,1) \oplus (1\,0\,0\,0) \oplus (0\,0\,0\,0)$$

さらに、上の二つの非自明な既約表現を $\mathfrak{a}_3 \oplus \mathfrak{a}_1$ の表現として既約分解すると

$$\begin{array}{rcl} (0\,0\,0\,1) & = & (0\,0\,1\,-\,1) \oplus (1\,0\,0\,-\,1) \\ (1\,0\,0\,0) & = & (0\,1\,0\,-\,0) \oplus (0\,0\,0\,-\,2) \end{array}$$

$\mathfrak{k}_1$ の既約成分を含むのは $(1\ 0\ 0\ 0)$ だけ．$\mathfrak{k}_1$ のカシミール元 $C_0 + C_1$ の $(1\ 0\ 0\ 0)$ 上での固有値は-8、一方 $\mathfrak{g}$ のカシミール元 $C_{\mathfrak{g}} = C_0 + C_1 + C_2$ の $V(\varpi_4)$ 上での固有値は -12 だから $V(\varpi_4) \otimes Hom_{\mathfrak{k}}(V(\varpi_4), \mathfrak{k})$ 上でヤコビ微分作用素は $J = -22 - (-12 + (-12 + 8)) = -6 < 0$ となりカルタン埋め込みは不安定である．

3　関連する話題と問題

3.1. 位数 5 以上の場合.　コンパクト単純リー群 G 上の位数 5 以上の自己同型 σ で，対応するカルタン埋め込みが安定な極小埋め込みになる可能性を持つものは（$\mathfrak{k}$ が半単純でなければならないことから）次の二つに限られることがわかる；

- $G = E_8$, $\sigma = \exp(2\pi\sqrt{-1}v_4)$,　ord($\sigma$)$= 5$

- $G = E_8, \sigma = \exp(2\pi\sqrt{-1}v_5)$, $\mathrm{ord}(\sigma)= 6$.

(どちらの場合も対応するカルタン埋め込みは極小埋め込みになることは確かめられた).

$\mathrm{ord}(\sigma)=6$ の場合は，σ^2 および σ^3 の固定する部分群のリー環のカシミール元を考えることで $ad_{\mathfrak{g}}(C_i)$ $(i = 0,1,2,3)$ の固有値を求めることができる．しかし E_8 の復素既約表現の分岐について情報が不足していて安定か不安定かがまだわからない.(分岐について [9] にあるより多くの情報が必要)

また、$\mathrm{ord}(\sigma)=5$ の場合については、部分群を使って C_i の固有値を計算することは出来ない.

ポントリャーギン輪体. コンパクト連結リー群 G のホモロジー群の直和 $H_*(G) = \sum_{i=0}^n H_i(G;\mathbf{R})$ は有階代数の構造を持ち（**ポントリャーギン代数**)、G の階数を r とするとき、ホップの定理により、外積代数 $\wedge(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ と同型になる．古典群に対しては、基底 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ を代表する輪体が知られている（**ポントリャーギン輪体**という）.

整数 i $(1 \le i \le [N/2])$ に対して $\mathbf{R}^{2i+1}(\subset \mathbf{R}^N)$ 内の向き付けられた 2-次元線形部分空間全体のなすグラスマン多様体を $G_{2,2i+1}$ により表す．各 $(\xi,\theta) \in G_{2,2i+1} \times \mathbf{R}$ に対して、$\phi_i(\xi,\theta)$ で $\mathbf{R}^N$ 上の直交変換で平面 ξ 上では角 θ の回転で、直交補空間 $\xi^\perp$ 上では恒等写像であるものを表す．写像 $\phi_i : S^1 \times G_{2,2i+1} \to SO(N)$ の像を Σ_{2i} で表す．N が奇数 $2n+1$ のときには

$$H_*(SO(2n+1)) = \wedge([\Sigma_2], [\Sigma_4], \cdots, [\Sigma_{2n}]).$$

である ([5]).

N が偶数 $N = 2n$ のときには、カルタン埋め込み

$$SO(2N)/S(O(2) \times (2N-2)) \to SO(2N)$$

の像を Ω_n とすると

$$H_*(SO(2n)) = \wedge([\Sigma_2], [\Sigma_4], \cdots, [\Sigma_{2n}], [\Omega_n]).$$

である ([5])

G をコンパクト単純リー群とし σ を G 上の位数 2 の自己同型で G/K がエルミット対称空間であるものとする．このときσ は内部自己同型で K の中心 K_0 は S^1 と同型である．写像

$$\widetilde{\Psi} : G \times K_0 \to G; (gK, c) \mapsto gcg^{-1}$$

を考える．$\widetilde{\Psi}$ は自然に写像 $\Psi : G/K \times K_0 \to G$ を引き起こす.(Ψ は $G/K \times 1$ において正則でない.) ポントリャーギン輪体 $[\Sigma_{2k}]$ は $\widetilde{\Psi}$ を $SO(2k+1) \times K_0$ に制限した写像 Ψ_k の像としても得られる.

$SU(N)$ のポントリャーギン輪体は、$SO(2k+1)$ のポントリャーギン輪体と同様に定義されるが、 Le Hong Van ([17]) はそれらが安定な極小部分多様体であることを示している．comass は、微分形式をグラスマン束の上の関数と見たときの最大値である（これを求める事は一般に容易でない）が、Van は最大値のかわりに極大値を考えることにより relative calibration の概念を定義してそれを用いている．

井川が [7] で用いた方法と同様の方法で、G が C_n $(n \geq 2)$ 型でないときの Ψ や Ψ_k の像から特異点を除いた部分多様体は、安定な極小部分多様体であることを示すことが出来る．

3.3. カルタン埋め込みの像 $\Psi_\sigma(G/K)$ の安定性と K の安定性には関係がありそうに見える．これら二つの部分多様体の接空間は互いに直交補空間になっているので、もしどちらか一方をキャリブレートするキャリブレーション ω があれば、他方は $*\omega$ でキャリブレートされる両者ともにホモロジー類中体積最小となる．極大階数の部分群の属するホモロジー類は 0 ([11]) なので、内部自己同型でなく外部自己同型に対応するカルタン埋め込みの方が重要かも知れない．

参考文献

[1] B. Y. Chen and T. Nagano, *Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, II*, Duke Math. J., 45(1978), 405–425.

[2] B. Y. Chen, P. F. Leung and T. Nagano, *Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, III*, preprint.

[3] Dao Chong Thi *Minimal real currents on compact Riamannian manifolds*, Izv. Akad. Nauk. SSSR, 41(1977), 807–820.

[4] E. B. Dynkin *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*, Amer. Math. Soc. Translations Ser.2, 6(1960), 111–244.

[5] ——— *Homologies of compact Lie groups*, Amer. Math. Soc. Transl., 12(1953), 251–300.

[6] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr. *Calibrated geometries*, Acta Math., 148(1982), 47–157.

[7] O. Ikawa *On stability of a certain minimal submanifold in $SU(3).SO(3)$*, Tukuba J. Math., 16(1992), 335–352.

[8] J. A. Jimenez *Riemannian 4-symmetric spaces* Trans. Amer. Math. Soc., 306(1988), 715–734.

[9] W. G. McKay and J. Patera, *Tables of dimensions, indices, and branching rules for representations of simple Lie algebras*, Lecture Notes in Pure and Applied Math. 69(1981), Marcel Dekker

[10] K. Mashimo and H. Tasaki, *Stability of closed Lie subgroups in compact Lie groups*, Kodai Math. J., 13(1990), 181–203.

[11] ———, *Stability of maximal tori in compact Lie groups*, Algebras, Groups and Geometries, 7(1990), 114–126.

[12] K. Mashimo *On the Stability of Cartan embeddings of compact symmetric spaces*, Archiv der Math., 58(1992), 500–508

[13] ———, *Cartan Embeddings of Compact Riemannian 3-Symmetric Spaces*, Tokyo J. Math., (1996), 353–364.

[14] Y. Ohnita *On stability of minimal submanifolds in compact symmetric spaces*, Composition Math., 64)1987), 157–189.

[15] M. S. Tanaka *Stability of minimal submanifolds in symmetric spaces*, Tsukuba J. Math., 19(1995), 27–56.

[16] H. Tasaki *Certain minimal or homologically volume minimizing submanifolds in compact symmetric spaces*, Tsukuba J. Math., 9(1985), 117-131.

[17] Le Hong Van *Relative calibrations and the problem of stability of minmal surfaces*, Lecture Notes in Math., 1453(1990), 245–262.

[18] J. A. Wolf and A. Gray *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms, I,II*, J. Differential Geometry, 2(1968), 77–159.